

Modélisation électromagnétique par la méthode FIT en utilisant un maillage dual orthogonal localement barycentrique

Laurent Bernard et Lionel Pichon

Laboratoire de Génie Electrique de Paris, CNRS UMR8507; SUPELEC; UPMC Univ Paris 06; Univ Paris-Sud;
11 rue Joliot-Curie, Plateau de Moulon, F-91192 Gif-sur-Yvette Cedex
E-mail: laurent.bernard@lgep.supelec.fr

Résumé — Cet article présente comment un maillage dual orthogonal et localement barycentrique peut être utilisé pour améliorer les performances de la modélisation par la méthode FIT (Finite Integration Technique). Dans les régions où le maillage dual est orthogonal au maillage primal, les matrices constitutives sont diagonales. Dans les régions où le dual est barycentrique, elles sont calculées à partir des éléments de Whitney ou de la « microcell method ». Les avantages de ces deux approches sont mis en évidence en 2D. Des résultats numériques sont présentés pour la modélisation d'un guide d'onde coaxial.

I. INTRODUCTION

La « Finite Integration Technique » [1] (ou Différences Finies Généralisées, ou « Cell Method ») est une méthode de modélisation très générale permettant notamment de résoudre des problèmes d'électromagnétisme statique ou dynamique dans les domaines fréquentiels ou temporels. Elle est équivalente à la méthode des différences finies lorsqu'elle est appliquée sur des maillages de type grille orthogonale, mais elle permet aussi d'utiliser des maillages non-structurés à la manière de la méthode des éléments finis. Les recherches actuelles concernent principalement le choix des grandeurs à discrétiser sur le maillage primal et sur le maillage dual [2] et le calcul des matrices constitutives [3] [4]. La FIT est particulièrement efficace lorsque les maillages duaux sont orthogonaux entre eux (i.e. lorsque les arêtes de l'un sont orthogonales aux facettes de l'autre) : les matrices constitutives, qui représentent les propriétés électromagnétiques des matériaux, sont alors diagonales. Malheureusement, il est souvent impossible de construire des maillages duaux satisfaisant la condition d'orthogonalité. Diverses solutions sont alors envisageables pour le calcul des matrices constitutives, parmi lesquelles :

- La « Microcell Method » qui peut être appliquée pour un maillage dual quelconque [5],
- les éléments de Whitney qui permettent le calcul dans le cas d'un maillage dual barycentrique [6].

Ces deux solutions génèrent des matrices constitutives creuses mais non-diagonales. En partant d'un maillage primal triangulaire de bonne qualité, la plupart des éléments admettent un dual orthogonal. Cet article montre comment utiliser avantageusement la construction orthogonale des matrices constitutives sur des maillages 2D triangulaires.

II. MAILLAGES DUAUX

Un maillage primal triangulaire est d'abord généré. Pour les cellules contenant le centre de leur cercle circonscrit, celui-ci constitue un nœud du maillage dual orthogonal. Les arêtes du maillage dual sont constituées de « morceaux »

des médiatrices des arêtes du maillage primal. Pour les autres éléments, le barycentre peut être choisi comme nœud dual. Dans la construction barycentrique, les arêtes du maillage dual relient le barycentre des triangles du maillage dual au barycentre de ses arêtes. Les arêtes du maillage dual barycentrique sont donc constituées de « morceaux » de médianes des triangles du maillage primal, et la connexion entre les cellules duales barycentriques et orthogonales est naturelle (Fig. 1).

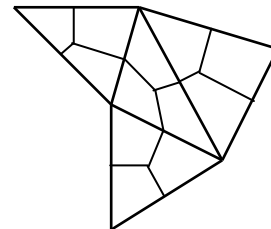


Fig. 1. Cellule triangulaire à dual barycentrique entourée de cellules triangulaires à dual orthogonal.

Si le maillage triangulaire primal est de bonne qualité, presque toutes les cellules admettent un dual orthogonal. Cependant, lorsque le centre du cercle circonscrit est proche du bord de la cellule, il peut être préférable de le rejeter et d'utiliser le dual barycentrique (Fig. 2). Par exemple, pour la résolution des problèmes dans le domaine temporel avec un schéma explicite, une petite arête imposerait une discrétisation temporelle très fine pour assurer la stabilité.

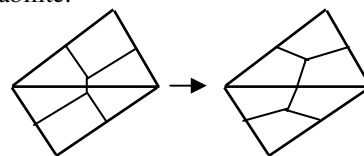


Fig. 2. Gauche : cellules primales et duales orthogonales ayant une « petite » arête. Droite : construction barycentrique préférable.

III. CALCUL DES MATRICES CONSTITUTIVES

La discrétisation choisie consiste à prendre pour inconnues les circulations du champ électrique (\mathbf{e}) sur les arêtes (a) du maillage primal et donc les flux d'induction électrique (\mathbf{d}) à travers les arêtes (\tilde{a}) du maillage dual. La matrice constitutive M_e relie ces inconnues :

$$\mathbf{d} = M_e \mathbf{e} \quad (1)$$

A. Construction par la « Microcell Method » [5]

Dans la « Microcell Method » les champs et les propriétés électromagnétiques sont considérés uniformes sur chaque microcellule formée par l'intersection d'une

cellule primale et d'une duale. Pour chaque microcellule, une matrice constitutive reliant les circulations et les flux partiels correspondants peut alors être calculée. Ces matrices élémentaires sont assemblées sur chacune des cellules duales. Puis, une inversion de matrice (élémentaire duale) est nécessaire avant l'assemblage sur l'ensemble du maillage qui donne enfin une matrice $M_{1/\varepsilon}$. Cette méthode est généralement employée dans le cas d'un maillage dual barycentrique mais elle peut s'appliquer à tout type de maillage dual. Il est aussi possible de tirer profit d'un maillage dual orthogonal. Pour toutes les microcellules correspondant à un nœud dual orthogonal, la matrice élémentaire (m_ε) est diagonale et peut être calculée par :

$$m_{\varepsilon i} = \frac{\text{surface}(\tilde{a}')}{\text{longueur}(a')} \varepsilon \quad (2)$$

où ε est la permittivité du milieu, a' et \tilde{a}' désignent les portions d'une arête et de sa duale pour la microcellule considérée. La procédure d'assemblage est identique à celle de la « Microcell Method ». Il faut noter que la matrice constitutive ainsi calculée n'est pas symétrique.

B. Construction à partir des éléments de Whitney

Il a été montré que les éléments de Whitney (utilisés dans la méthode des éléments finis) permettent de calculer la matrice constitutive dans le cas où le maillage dual est barycentrique [6]. Ici, pour chaque triangle (T), les éléments d'arêtes (w^a) donnent la matrice locale par :

$$m_{\varepsilon ij} = \int_T \varepsilon w_i^a w_j^a \quad (3)$$

De même que précédemment, cette matrice locale peut être remplacée par une matrice diagonale sur les éléments à dual orthogonal avant l'assemblage. Les éléments diagonaux de cette matrice sont donnés par une équation similaire à (2) mais reliant, cette fois-ci, les circulations sur les arêtes primales entières aux flux à travers les portions d'arêtes duales contenues dans chaque élément. La matrice M_ε obtenue après assemblage est symétrique définie positive.

IV. RESULTATS NUMERIQUES

Le cas d'un guide coaxial terminé par un diélectrique à pertes et un court-circuit est étudié (Fig. 3). Le guide est excité par une source de tension sinusoïdale à 30GHz. Le problème est modélisé en 2D axisymétrique dans le domaine temporel avec un schéma « saute-mouton ». Le maillage primal est triangulaire et une couche d'éléments carrés est utilisée en entrée du guide pour pouvoir appliquer une condition absorbante du premier ordre (issue de la méthode FDTD). Le maillage primal est généré avec Gmsh [7]. La méthode proposée a été entièrement développée sous Matlab. La durée de la simulation est suffisante pour atteindre le régime permanent et pouvoir comparer les résultats à la solution analytique fréquentielle du problème.

La même simulation est effectuée avec les différentes matrices constitutives construites en utilisant la « Microcell

Method » (MM) et les éléments de Whitney (W) classiques, ou ces mêmes méthodes associées à la construction orthogonale présentée ici (notées MMO et WO). Pour toutes ces différentes matrices constitutives, les résultats numériques montrent une très bonne correspondance avec la solution analytique (Fig. 4).

Le maillage est constitué de 1148 éléments dont seulement 94 nécessitent un dual barycentrique. Les méthodes tirant profit de l'orthogonalité des maillages permettent donc de réduire considérablement le nombre d'éléments non nuls des matrices constitutives (Table 1) (il est à noter que les méthodes MM et MMO donnent la matrice $M_{1/\varepsilon}$ alors que les méthodes W et WO donnent M_ε , $M_{1/\varepsilon}^{-1}$ et M_ε^{-1} sont calculées par inversion directe).

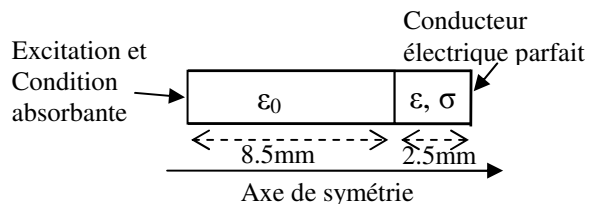


Fig. 3. Schéma du guide coaxial.

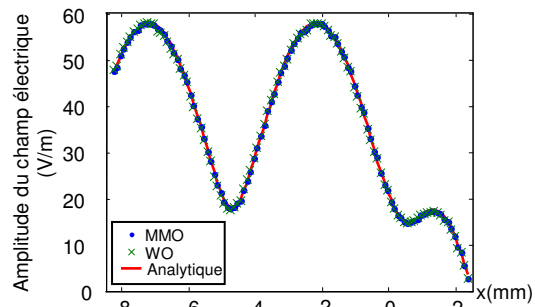


Fig. 4. Résultats de simulation et solution analytique.

TABLE I. CARACTERISTIQUES DES MATRICES CONSTITUTIVES

Méthode	Nombre de valeurs non nulles	
	M_ε ou $M_{1/\varepsilon}^{-1}$	M_ε^{-1} ou $M_{1/\varepsilon}$
MM	3×10^6	18060
MMO	2660	2530
W	8512	3×10^6
WO	2428	2660

REFERENCES

- [1] T. Weiland, "A discretization method for the solution of Maxwell's equations for six-component fields", *Electronics and Communications*, vol. 31, no. 3, pp. 116–120, 1977.
- [2] J. Korecki, Y. Le Menach, J-P. Ducreux, F. Piriou, "Numerical solutions in primal and dual meshes of magnetostatic problems solved with the finite integration technique", *COMPEL*, vol. 27, no. 1, pp. 47–55, 2008.
- [3] P. Alotto, A. De Cian, G. Molinari, "A time-domain 3-D Full-Maxwell solver based on the Cell Method", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 42, no. 4, pp. 799–802, 2006.
- [4] B. Auchmann, S. Kurz, "A geometrically defined discrete Hodge operator on simplicial cells", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 42, no. 4, pp. 643–646, 2006.
- [5] M. Marrone, "Computational aspects of the cell method in electrodynamics", *PIER*, vol. 32, pp. 317–356, 2001.
- [6] A. Bossavit, "Computational electromagnetism and geometry (5): The "Galerkin Hodge"", *J. Japan Soc. Appl. Electromagn.*, vol. 8, pp. 203–209, 2000.
- [7] "Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with pre- and post-processing facilities", <http://www.geuz.org/gmsh/>