

## **Modélisation par éléments finis d'un système asymétrique de type poutre avec des patchs piézoélectriques**

H.Hariri, Y.Bernard, A. Razek

Laboratoire de Génie Electrique de Paris (LGEP) / SPEE-Labs, CNRS UMR 8507; SUPELEC;  
Université Pierre et Marie Curie P6; Université Paris-Sud 11; 11 rue Joliot Curie, Plateau de  
Moulon F91192 Gif sur Yvette CEDEX

### **Résumé**

**Le système étudié dans le présent document est une structure constituée d'une poutre encadrée à une extrémité munie de deux patchs piézoélectriques collés sur une même face. Considérant l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, les relations linéaires constitutives, la contrainte uniaxiale et en appliquant le principe d'Hamilton, nous avons développé une modélisation simplifiée de la structure. Deux cas sont étudiés, dans le premier, un patche piézoélectrique est utilisé comme actionneur et l'autre comme capteur; dans le deuxième cas, les deux patchs sont utilisés comme actionneurs. L'objectif du travail présenté est de valider expérimentalement le modèle simplifié. L'amortissement structural est inclus dans le modèle pour tenir compte des pertes mécaniques. L'originalité du travail réside dans l'utilisation de la notion d'axe neutre pour modéliser ce système asymétrique. Cette technique permet de gagner du temps de calcul. La modélisation en incorporant la notion d'axe neutre peut se faire en utilisant la méthode des différences finies ou la méthode des éléments finis. Après validation expérimentale du modèle par éléments finis simplifié, une étape d'optimisation est présentée.**

**Mots-clés : système asymétrique, matériaux piézoélectriques, Euler-Bernoulli, contrainte uniaxiale, axe neutre, modèle par éléments finis.**

### **Abstract**

**The system studied in this paper consists of a cantilever beam with two piezoelectric patches bonded on its surface. Basing on Euler-Bernoulli assumptions for a beam structure, the linear constitutive relations, uniaxial stress and by applying Hamilton principle, we developed a simplified model of the system. Two cases are studied, in the first a patch is used as a piezoelectric actuator and the other as a sensor, in the second case the two patches are used as actuators. The aim of the present work is to experimentally validate the simplified model. The structural damping is included in the model to match the damping behavior of the real system. The originality of the work is in the use of the concept of neutral axis to model this asymmetric system. This technique saves computational time. Modeling by incorporating the concept of neutral axis can be done using the finite difference method or finite element method. After experimental validation of this simplified finite element model, an optimization step is presented.**

**Keywords: asymmetric system, piezoelectric materials, Euler-Bernoulli, uniaxial stress, neutral axis, finite element model.**

## 1. Introduction

Les structures de type poutre contenant des matériaux piézoélectriques sont utilisées dans de nombreuses applications : alignement des fibres optiques [1], robots piézoélectriques miniatures [2], miroirs déformables [3], micropompes [4], soupapes [5], moteurs ultrasonores [6] .... Pour optimiser ces systèmes et afin d'explorer de nouvelles applications, leur modélisation numérique est nécessaire. L'objectif de notre étude est de développer une modélisation par éléments finis permettant de modéliser des systèmes asymétriques de type poutre avec de patches piézoélectriques collés sur une même face.

Plusieurs articles de la littérature sont consacrés à la modélisation par éléments finis de systèmes de type poutre avec des patches piézoélectriques. Cependant, classiquement, la symétrie du système est conservée lors de la disposition des patches [7-13]. Les systèmes asymétriques ne sont que rarement étudiés dans la littérature. L'étude analytique d'une poutre actionnée par un patch piézoélectrique unique est présentée dans [14]. Dans notre cas, une modélisation par éléments finis du dispositif est développée et validée expérimentalement. Le cas d'étude contient deux patches piézoélectriques utilisés en effet direct et inverse collés sur une même face. L'utilisation de la notion d'axe neutre permet de diminuer d'une dimension le système étudié.

Deux cas seront traités, le premier cas est le cas dit "actionneur-capteur" où un patch est utilisé en capteur et l'autre en actionneur, le deuxième cas est dit "actionneur-actionneur", les deux patches sont utilisés en actionneurs.

Dans cet article, on va présenter le dispositif étudié. Dans la deuxième partie, on présentera les hypothèses du modèle, la définition de l'axe neutre et la mise en équation utilisant le principe d'Hamilton. On présentera ensuite la modélisation par éléments finis du dispositif en traitant les deux cas déjà mentionnés. Dans la quatrième partie, on présentera la validation du modèle en comparant les résultats du modèle avec des résultats expérimentaux. La comparaison se fera sur les fréquences de résonance, ainsi que sur la déformation du système sous l'action d'une tension appliquée aux patches piézoélectriques. Après validation du modèle, une étude de l'épaisseur optimale des patches piézoélectriques est menée pour plusieurs types de matériaux de la poutre.

## 2. Présentation du dispositif étudié

Le dispositif étudié est représenté sur la figure 1. Il est constitué d'une poutre en aluminium encastree à une extrémité, l'autre étant laissée libre. Deux patches de céramique PZT sont collés sur une face de la poutre et ils sont polarisés suivant l'axe  $z$ . Compte tenu de la géométrie du système où une dimension est grande devant les deux autres, les contraintes sont négligées devant celles de l'axe de  $x$ .

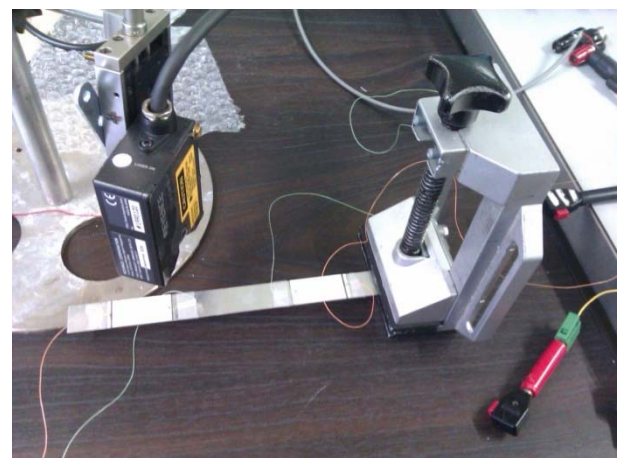
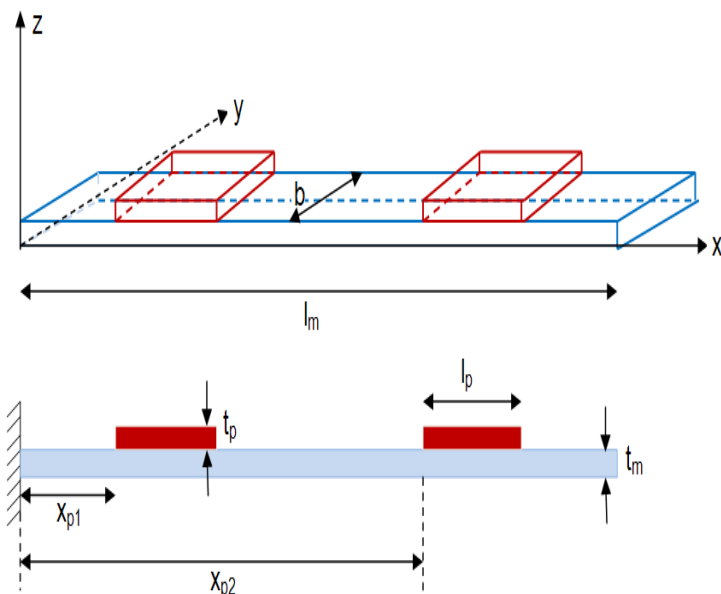


Figure 1 : dispositif d'étude

### 3. Mise en équations

L'équation du système est établie d'après les hypothèses d'Euler-Bernoulli. La contrainte est supposée uniaxiale dans la direction x. Avec l'hypothèse des petites déformations, la section droite reste perpendiculaire à l'axe neutre après déformation (figure 2). Le champ électrique est supposé être uniformément réparti dans la direction z. Ainsi, le champ de déplacement devient

$$\{u\} = \begin{cases} u_1(x, y, z, t) \approx -(z - z_n) \partial_x w(x, t) \\ u_2(x, y, z, t) = 0 \\ u_3(x, y, z, t) \approx w(x, t) \end{cases} \quad (1)$$

Où  $w(x, t)$  est le déplacement suivant z de l'axe neutre  $z_n$  du système.

L'axe neutre  $z_n$  peut être déterminé en annulant la somme de toutes les forces dans la direction x sur la totalité de la section droite [15], ici  $z_n$  est calculée à partir du bas du système selon le système de coordonnées prises dans la figure 3, et donc

$$b \int_0^{t_m} \sigma_1^m(z) dz + b \int_{t_m}^{t_m+t_p} \sigma_1^p(z) dz = 0 \quad (2)$$

Où  $\sigma_1^p$  et  $\sigma_1^m$  représentent les contraintes uniaxiales dans la direction de x pour les patches piézoélectriques et la couche élastique l'aluminium. Selon l'hypothèse de contrainte uniaxiale et les conditions linéaires élastiques des matériaux et avec les lois de comportement, on peut écrire :

$$\sigma_1^m = c_m \varepsilon_1, \quad (3)$$

$$\sigma_1^p = c_p \varepsilon_1 - e_p E_3 = \frac{1}{s_{11}^E} \varepsilon_1 - \frac{d_{31}}{s_{11}^E} E_3 \quad (4)$$

$$D_3 = e_p \varepsilon_1 + \varepsilon_p^\varepsilon E_3 = \frac{d_{31}}{s_{11}^E} \varepsilon_1 + \left( \varepsilon_{33}^\sigma - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} \right) E_3 \quad (5)$$

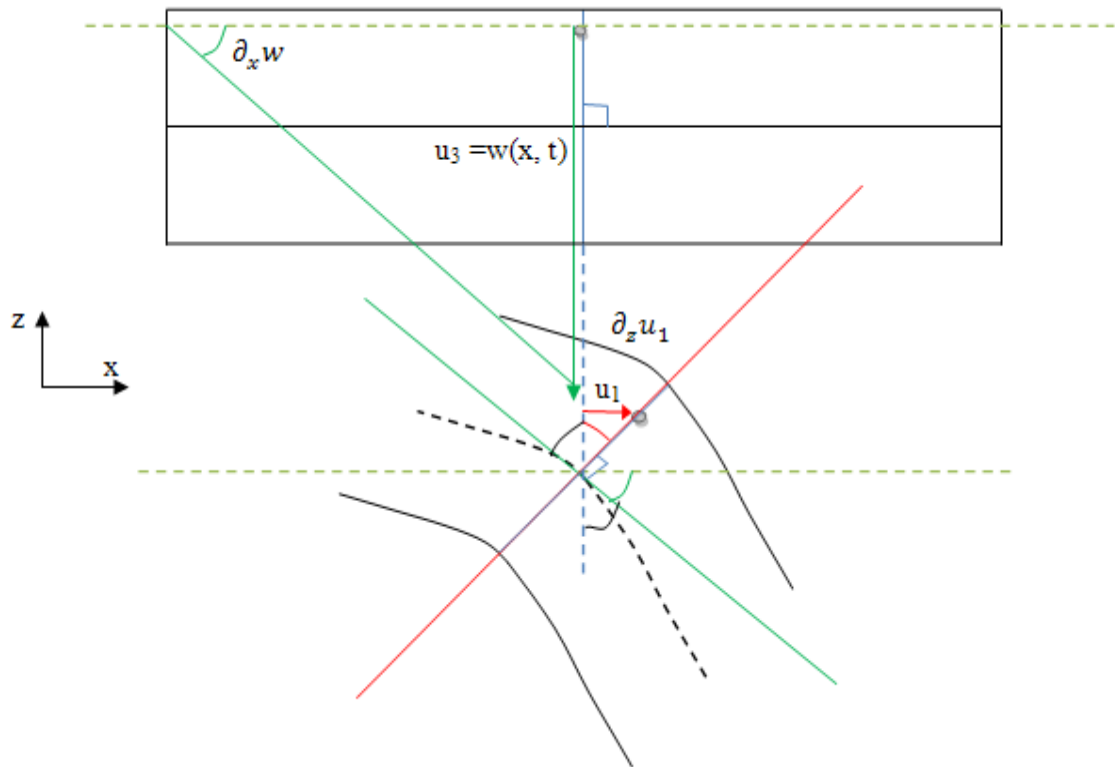


Figure 2 : Cinématique de la déformation d'une poutre d'Euler-Bernoulli

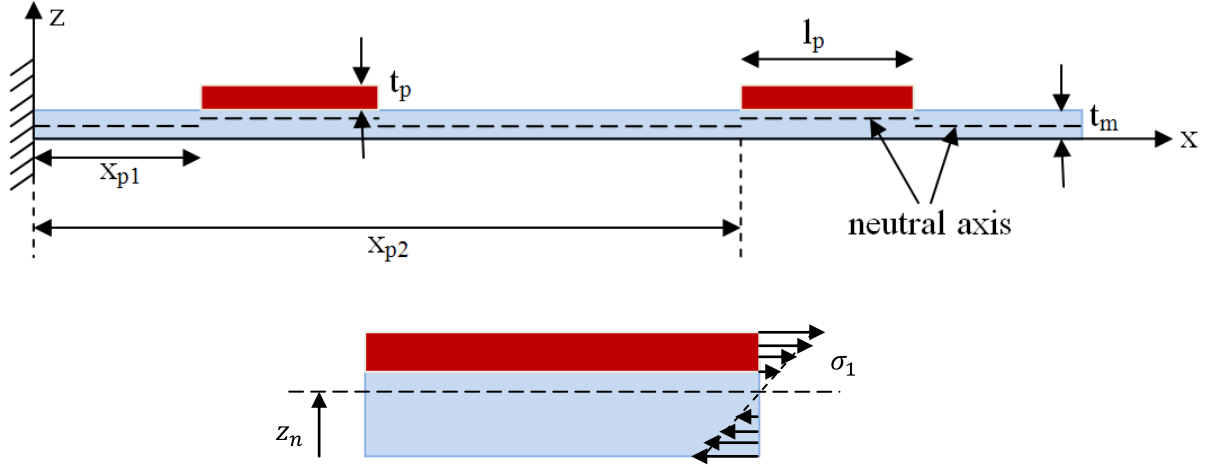


Figure 3 : Système de coordonnées et description de l'axe neutre

Avec  $c_p = \frac{1}{s_{11}^E}$  est le module de Young pour les patches piézoélectriques,  $e_p = \frac{d_{31}}{s_{11}^E}$  est la constante piézoélectrique,  $c_m$  est le module de Young pour la couche d'aluminium,  $s_{11}^E$  est la compliance élastique pour les patches piézoélectriques à champ électrique constant,  $d_{31}$  est la constante piézoélectrique et  $\epsilon_p^\epsilon = \epsilon_{33}^\sigma - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E}$  avec  $\epsilon_{33}^\sigma$  est la permittivité diélectrique à contrainte constante. Les propriétés et paramètres géométriques du PZT et de la couche d'aluminium sont présentés dans le tableau 1.  $\epsilon_1$  est la déformation dans la direction x et est définie par

$$\epsilon_1 = \partial_x u_1 = - (z - z_n) \partial_x^2 w \quad (6)$$

En utilisant la loi de Hook et en substituant la relation de déformation, on a donc

$$\int_0^{t_m} c_m (z - z_n) dz + \int_{t_m}^{t_m+t_p} c_p (z - z_n) dz = 0 \quad (7)$$

Tableau 1 : propriétés et géométries du système

|   | PZT                              | Aluminium                  |
|---|----------------------------------|----------------------------|
| Young's modulus (Pa)                                  | /                                | $c_m = 69 \times 10^9$     |
| Poisson's ratio                                       | /                                | $\nu_m = 0.33$             |
| Volume density (kg.m <sup>-3</sup> )                  | $\rho_p = 7900$                  | $\rho_m = 2700$            |
| Relative permittivity                                 | $\epsilon_{33r} = 1282$          | /                          |
| Piezoelectric constant (m.V <sup>-1</sup> )           | $d_{31} = -1.3 \times 10^{-10}$  | /                          |
| Elastic compliances (Pa <sup>-1</sup> )               | $S_{11} = 1.3 \times 10^{-11}$   | /                          |
| Max peak to peak electric field (V.mm <sup>-1</sup> ) | $E_{max} = 300$                  | /                          |
| Max compressive strength (Pa)                         | $\sigma_{max} = 600 \times 10^6$ | /                          |
| Length × width × thickness (mm <sup>3</sup> )         | $32 \times 17 \times 0.27$       | $180 \times 17 \times 0.5$ |

Et après simplification, l'axe neutre est

$$z_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{c_m t_m^2 + c_p t_p^2 + 2c_p t_p t_m}{c_m t_m + c_p t_p} & \text{si } x_{p1} < x < x_{p1} + l_p \text{ et } x_{p2} < x < x_{p2} + l_p \\ \frac{t_m}{2} & \text{si non} \end{cases} \quad (8)$$

En appliquant le principe d'Hamilton tel que décrit dans [16], on obtient l'équation variationnelle régissant la partie mécanique et piézoélectrique du système.

$$\int_V (-\rho \{\delta u\}^t \{\ddot{u}\} - \{\delta \varepsilon\}^t [c] \{\varepsilon\} + \{\delta \varepsilon\}^t [e]^t \{E\} + \{\delta E\}^t [e] \{\varepsilon\} + \{\delta E\}^t [\varepsilon^e] \{E\} + \{\delta u\}^t \{F_v\}) dV + t_p \{\delta E\} Q = 0 \quad (9)$$

#### 4. Modèle éléments finis en 1D

Dans une formulation par éléments finis, les inconnues sont les valeurs de la solution aux nœuds du maillage et le champ de déplacement  $\{u\}$  est lié aux valeurs du nœud correspondant  $\{u_i\}$  par la moyenne des fonctions d'interpolation. Les fonctions Lagrangiennes ne sont pas utilisées dans ce problème parce que la solution  $w(x, t)$  doit être  $C^1$ -continue tandis que Lagrange n'assure qu'une continuité- $C^0$ . Le choix des éléments d'Hermite vérifie cette condition. Ainsi, avec les éléments d'Hermite, la solution  $\{u\}$  qui dépend seulement de  $w(x, t)$  dans ce cas s'écrit de la façon suivante sur un segment  $i$  :

$$W(x, t) = [\lambda(x)] \{u_i\}$$

$$\text{Où } [\lambda(x)] = [\lambda_1(x) \quad \lambda_2(x) \quad \lambda_3(x) \quad \lambda_4(x)] \text{ sont les fonctions d'interpolations et } \{u_i\} = \begin{bmatrix} w_i \\ \partial_x w_i \\ w_{i+1} \\ \partial_x w_{i+1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

sont les inconnues au segment  $i$ .

Intégrant l'équation (11) sur la totalité du volume du système, on obtient une équation qui décrit le système par des intégrales suivant  $x$ . Intégrer cette équation sur la longueur du système revient à intégrer sur chaque segment et à en faire la somme. Les conditions aux limites sont prises en compte lors de l'assemblage des matrices et l'équation numérique s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_i \\ \ddot{E}_{3p1} \\ \ddot{E}_{3p2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ \dot{E}_{3p1} \\ \dot{E}_{3p2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{mvp1} & K_{mvp2} \\ K_{vmp1} & K_{vvp1} & 0 \\ K_{vmp2} & 0 & K_{vvp2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ E_{3p1} \\ E_{3p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ t_p Q_{p1} \\ t_p Q_{p2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Où  $[M]$  est la matrice de masse,  $[K]$  celle de rigidité. Il doit être noté que la formulation variationnelle ne prend pas en compte l'amortissement mécanique du système. Ce phénomène est ajouté dans l'équation globale du système avec une matrice d'amortissement  $[C]$ .  $E_{3p1}$ ,  $E_{3p2}$ ,  $Q_{p1}$  et  $Q_{p2}$  sont les champs électriques et les charges électriques pour les deux patches piézoélectriques.  $F_i$  sont les forces ponctuelles sur chaque nœud.

##### 4.1. Actionneur-capteur

Le premier cas traité est le cas actionneur-capteur où le patche actionneur se déforme sous l'effet d'un champ électrique  $E_{3p1}(t)$  et le patch capteur se comporte comme un circuit ouvert ( $Q_{p2} = 0$ ). L'équation numérique sera

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_i \\ t_p \ddot{Q}_{p1} \\ \ddot{E}_{3p2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ t_p \dot{Q}_{p1} \\ \dot{E}_{3p2} \end{bmatrix} + \\
\begin{bmatrix} K_{mm} - K_{mvp1}K_{vvp1}^{-1}K_{vmp1} & K_{mvp1}K_{vvp1}^{-1} & K_{mvp2} \\ -K_{vvp1}^{-1}K_{vmp1} & K_{vvp1}^{-1} & 0 \\ K_{vmp2} & 0 & K_{vvp2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ t_p Q_{p1} \\ E_{3p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{3p1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

#### 4.2. Actionneur- actionneur

Dans ce cas le modèle du système est régi par l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_i \\ t_p \ddot{Q}_{p1} \\ t_p \ddot{Q}_{p2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_i \\ t_p \dot{Q}_{p1} \\ t_p \dot{Q}_{p2} \end{bmatrix} + \\
\begin{bmatrix} K_{mm} - K_{mvp1}K_{vvp1}^{-1}K_{vmp1} - K_{mvp2}K_{vvp2}^{-1}K_{vmp2} & K_{mvp1}K_{vvp1}^{-1} & K_{mvp2}K_{vvp2}^{-1} \\ -K_{vvp1}^{-1}K_{vmp1} & K_{vvp1}^{-1} & 0 \\ -K_{vvp2}^{-1}K_{vmp2} & 0 & K_{vvp2}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ t_p Q_{p1} \\ t_p Q_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{3p1} \\ E_{3p2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

### 5. Validation du modèle

La matrice d'amortissement [C] est déterminée expérimentalement [17]. L'amortissement de Rayleigh est considéré comme une voie classique pour modéliser l'amortissement de la structure. Il utilise l'hypothèse que la matrice d'amortissement est proportionnelle à une combinaison linéaire de la matrice de masse et de celle de rigidité [18-19].

On commence le processus de validation du modèle par une comparaison des fréquences de résonance du modèle avec celles du dispositif expérimental.

#### 5.1. Comparaison des fréquences de résonances

En court-circuit, la tension  $E_{3p}$  est nulle. Dans le cas d'un circuit ouvert, c'est la charge  $Q_p$  qui est nulle. Les fréquences de résonances du système dans le cas où les deux électrodes des patches piézoélectriques sont court-circuitées ( $E_{3p} = 0$ ) sont données par :

$$([K_{mm}] - (2\pi f_n)^2 [M])\{U\} = 0 \quad (14)$$

Dans le cas où un patch est en circuit ouvert ( $Q_{p1} = 0$ ) et l'autre en court-circuit ( $E_{3p2} = 0$ ), les fréquences de résonances du système sont données par :

$$([K_{mm} - K_{mvp1}K_{vvp1}^{-1}K_{vmp1}] - (2\pi f_n)^2 [M])\{U\} = 0 \quad (15)$$

En inversant les rôles de deux patches, on obtient :

$$([K_{mm} - K_{mvp2}K_{vvp2}^{-1}K_{vmp2}] - (2\pi f_n)^2 [M])\{U\} = 0 \quad (16)$$

Dans le cas où les deux patches sont en circuit ouvert ( $Q_p = 0$ ), les fréquences de résonances du système sont données par :

$$([K_{mm} - K_{mvp1}K_{vvp1}^{-1}K_{vmp1} - K_{mvp2}K_{vvp2}^{-1}K_{vmp2}] - (2\pi f_n)^2 [M])\{U\} = 0 \quad (17)$$

Ce qui montre que la matrice de rigidité dépend des conditions aux limites électriques. La rigidité globale du système augmente si les électrodes sont laissées ouvertes (le terme  $K_{vvp}$  étant négatif) ; les fréquences de résonance sont un peu plus élevées si les patches piézoélectriques en circuit ouvert plutôt qu'en court-circuit. Le tableau 2, présente les dix premières fréquences de résonance déterminées expérimentalement et par une modélisation par éléments finis dans le cas où le premier patche est court-circuité et le deuxième patche est en circuit ouvert. Le tableau montre un bon accord entre le modèle et les mesures expérimentales.

## 5.2. Comparaison des déplacements

On traite ici le cas capteur-actionneur où l'actionneur est alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude 10 V, et de fréquence égale successivement à la première, deuxième et troisième fréquence de résonance du système. Des mesures de déplacements suivant l'axe z effectuées sur toute la longueur du dispositif sont comparées avec les résultats du modèle donné par l'équation suivante :

$$\left[ - (2\pi f_n)^2 \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + j(2\pi f_n) \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} - K_{mvp2}K_{vvp2}^{-1}K_{vmp2} & K_{mvp1} & K_{mvp2}K_{vvp2}^{-1} \\ K_{vmp1} & K_{vvp1} & 0 \\ -K_{vvp2}^{-1}K_{vmp2} & 0 & K_{vvp2}^{-1} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} U_i \\ E_{3p1} \\ t_p Q_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{3p2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Les figures 4.a, 4.b et 4.c montrent une comparaison des déplacements entre les mesures expérimentales et les résultats de simulation du modèle à la première, deuxième et troisième fréquence de résonance. La figure 4.d, montre les déplacements de l'extrémité libre du dispositif.

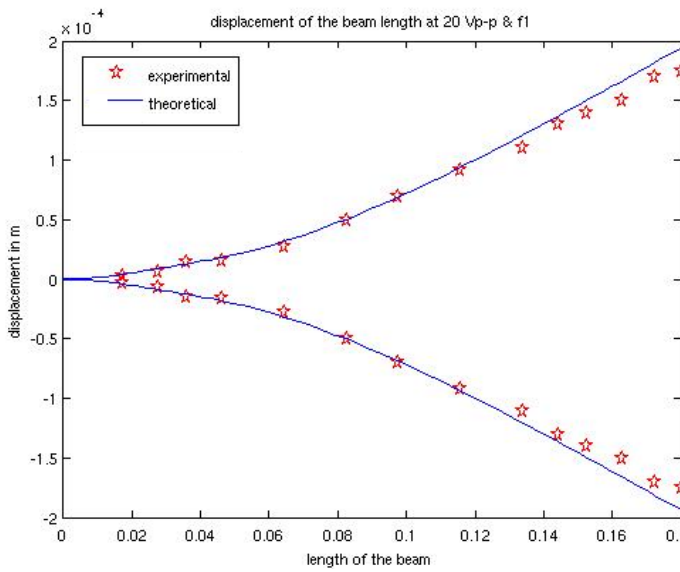
## 6. Conception optimale

Dans ce paragraphe, on va étudier l'influence de l'épaisseur des patches piézoélectriques et de la rigidité de la poutre sur l'amplitude des déplacements et sur la fréquence de résonance du système. L'épaisseur optimale pour un patch piézoélectrique est l'épaisseur qui donne un déplacement maximal de la poutre et elle est la même pour un fonctionnement statique ou dynamique du système [20]. Une étude en statique est faite pour déterminer cette épaisseur.

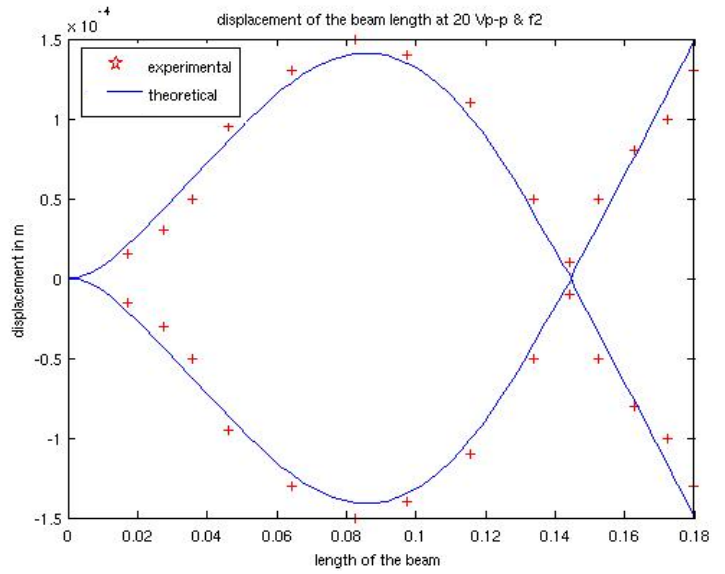
L'épaisseur optimale pour les deux patches est déterminée pour un champ électrique constant appliqué à un patch, l'autre étant maintenu en circuit ouvert. En variant l'épaisseur des patches et en calculant le déplacement pour différentes rigidités de la poutre, on obtient les courbes de la figure 5.a. La décroissance de la figure 5.a, montre que, quand l'épaisseur des patches piézoélectriques devient

**Tableau 2 : comparaison des fréquences de résonances en Hz**

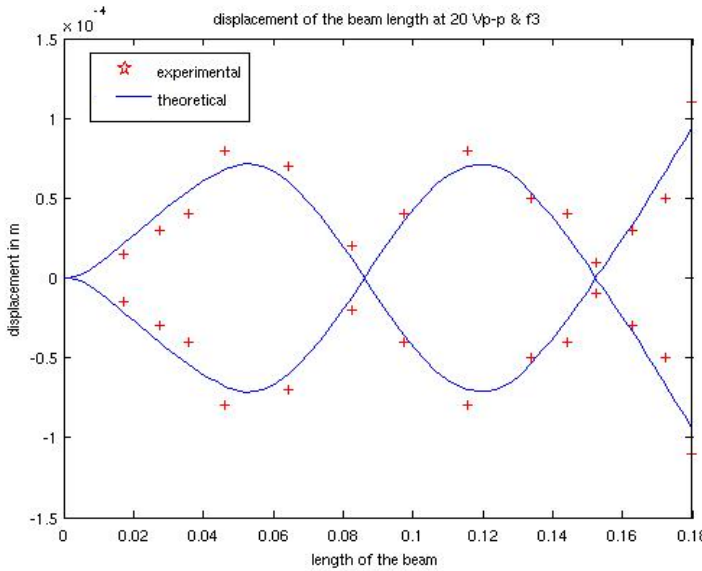
| Mode order   | 1     | 2     | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8    | 9      | 10     |
|--------------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|------|--------|--------|
| FEM          | 11.92 | 76.13 | 221.21 | 486.85 | 772.04 | 1060.4 | 1546.6 | 2173 | 2746.4 | 3421.6 |
| Experimental | 12    | 77    | 225    | 515    | 837    | 1117   | 1645   | 2338 | 2843   | 3526   |



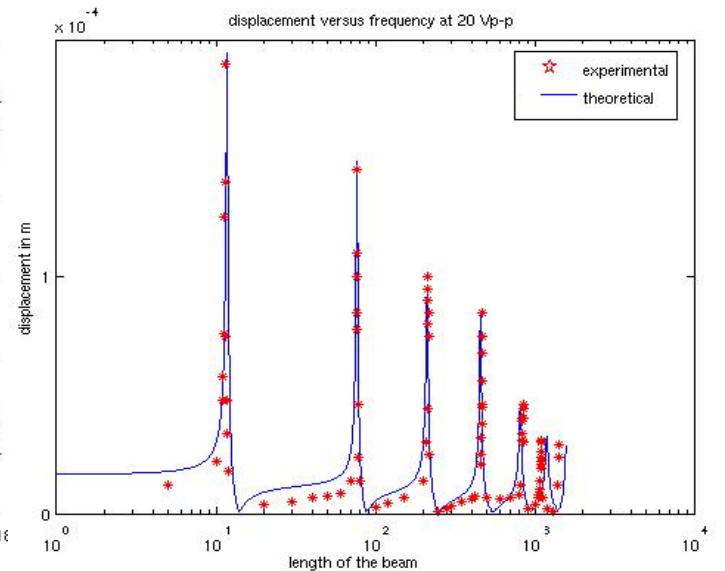
a) déplacements à la première fréquence



b) déplacements à la deuxième fréquence



c) déplacements à la troisième fréquence

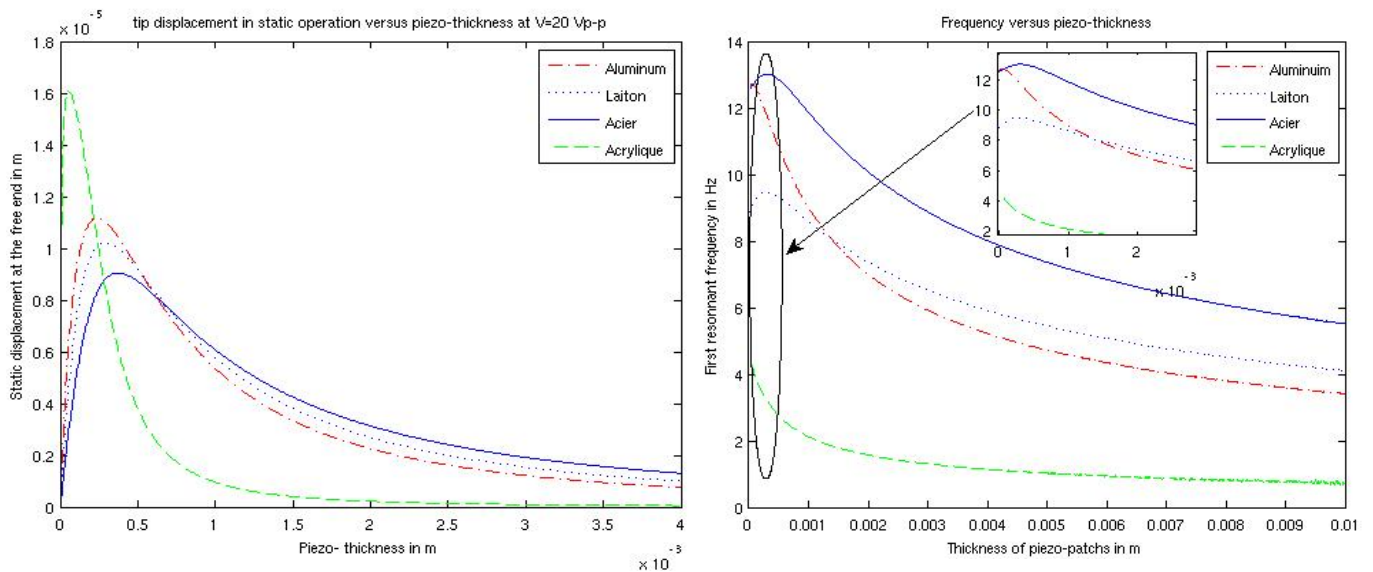


d) déplacements à l'extrémité libre du système

Figure 4: Validation du modèle éléments finis 1D

grande, la rigidité de flexion du système est plus importante que le moment de flexion généré par les patches piézoélectriques [21]. On peut aussi remarquer l'influence de la rigidité de la poutre sur les déplacements en fonction de l'épaisseur en prenant différents matériaux de rigidité décroissante. La figure 5.b, représente la fréquence du premier mode de résonance en fonction de l'épaisseur de patches piézoélectriques.





**Figure 5 : a) déplacements à l’extrémité libre du système en fonction de l’épaisseur de patches piézoélectrique**  
**b) Première fréquence de résonance en fonction de l’épaisseur de patches piézoélectriques**

## 7. Conclusions et perspectives

Dans le présent article, on a développé une modélisation par éléments finis pour un système asymétrique de type poutre avec de patches piézoélectriques collés sur une face. L’utilisation de la notion d’axe neutre dans notre système asymétrique nous permet de le modéliser en une seule dimension en tenant compte des autres dimensions dans le calcul. Cela permet de gagner du temps de calcul en regard d’une simulation tridimensionnelle. L’utilité d’un tel modèle est de nous permettre d’optimiser, le dimensionnement du système, en particulier au niveau de la position des patches selon les applications. Des techniques d’amortissements particulières peuvent être appliquées au modèle développé en connectant de circuits électriques au système [16]. Ce système peut être utilisé pour détecter l’endommagement sur la poutre, diminuer les vibrations inutiles ou pour générer une onde progressive sur la poutre en changeant les conditions aux limites mécaniques.

## Références

- [1] A. Tuominen, J. Lappalainen, J. Hiltunen, J. Ollila and V. Lantto, “Piezoelectric thin-film unimorph actuator for optical fibre alignment applications”, *Journal of optics a: pure and applied optics* 8, 2006.
- [2] K. J. Son, V. Kartik, J. A. Wickert and M. Sitti, “An ultrasonic standing-wave-actuated nano-positioning walking robot: Piezoelectric-metal composite beam modeling”, *Journal of vibration and control*, Vol. 12, no. 12, pp. 1293-1309, 2006.
- [3] Y. Hishinuma and E.H. Yang, “Piezoelectric unimorph microactuator arrays for single-crystal silicon continuous-membrane deformable mirror” *Journal of microelectromechanical systems*, Vol. 15, no. 2, April 2006.
- [4] D. Accoto, M. C. Carrozza and P. Dario, “Modelling of micropumps using unimorph piezoelectric actuator and ball valves”, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 10, no. 2, March 2000.
- [5] M. Sobocinski, J. Juuti, H. Jantunen, L. Golonka, “Piezoelectric unimorph valve assembled on an LTCC substrate”, *Sensors and Actuators A* 149, pp.315–319, 2009.
- [6] W H Duan, S T Quek and Q Wang, “A novel ring type ultrasonic motor with multiple wavenumbers: design, fabrication and characterisation”, *Journal of smart materials and structures*

- 18, 2009.
- [7] C.H. Nguyen, S.J. Pietrzko, "FE analysis of a PZT- actuated adaptive beam with vibration damping using a parallel R-L shunt circuit", *Journal of finite elements in analysis and design* 42, pp. 1231-1239, 2006.
- [8] R. Corcolle, E. Salaün, F. Bouillault, Y. Bernard, C. Richard, A. Badel, D. Guyomar, "Modeling of a beam structure with piezoelectric materials: introduction to SSD techniques", *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, Vol.27 Issue: 1, pp.205 – 214, 2008.
- [9] C.H. Park, "Dynamics modelling of beams with shunted piezoelectric elements", *Journal of Sound and vibration* 268, pp. 115-129, 2003
- [10] S.Y. Wang, S.T. Quek, K.K. Ang, "Dynamic stability analysis of finite element modelling of piezoelectric composite plates", *International journal of solids and vibrations* 41, pp. 745-764, 2004.
- [11] V. V. Varadan, "closed loop finite element modelling of active/passive damping in structural vibration control", *Journal of smart materials and structures* 5, pp. 685-694, 1996.
- [12] G.L.C.M. de Abreu, J.F. Ribeiro and V. Steffen, "Finite element modelling of a plate with localized piezoelectric sensors and actuators" *Journal of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, Vol. 26, No. 2, April-June 2004.
- [13] M. Y. Yasin, N. Ahmad, M. N. Alam, "Finite element analysis of actively controlled smart plate with patched actuators and sensors", *Latin American journal of solids and structures* 7, pp. 227-247, 2010.
- [14] N. Jalili, "Piezoelectric-Based Vibration Control, From Macro to Micro-Nano Scale Systems", Springer 2009.
- [15] R.G. Ballas, "piezoelectric multilayer beam bending actuator", Springer, 2007.
- [16] H. Hariri, Y. Bernard, A. Razek, "Finite element model of a beam structure with piezoelectric patches using RL shunt circuits", *AC2011, 14th International Conference on active systems for dynamics markets*, Darmstadt, Germany, pp.124-131, 07–08 septembre 2011.
- [17] S.O. Reza Moheimani and Andrew J. Fleming, "Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping", Springer 2006.
- [18] M. Liu, D.G. Gorman, "Formulation of Rayleigh damping and its extensions", *Journal of computers and structures*, Vol.57, Issue 2, pp. 277-285,1995.
- [19] L.Pons, H.Rodríguez, E.Rocon, J.F. Fernández, M. Villegas, "Practical consideration of shear strain correction factor and Rayleigh damping in models of piezoelectric transducers", *Journal of Sensors and Actuators A* 115, pp. 202–208, 2004.
- [20] H. Hariri, Y. Bernard, A. Razek, "Analytical and finite element model for unimorph piezoelectric actuator: Actuator design", "Piezo2011", sestriere, pp. 71-75, 27 February 2011.
- [21] Q.M; Wang, L.E. Cross, "Performance analysis of piezoelectric cantilever bending actuators", *Journal of Ferroelectrics*, Vol. 215, pp. 187-213, 1998.